



**УРАЛЬСКИЙ  
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

имени первого Президента  
России Б. Н. Ельцина

**Д.В. Опарин**

# **ПРАКТИКУМ ПО ОСНОВАМ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ**

**Часть I. Логические операции над высказываниями,  
формулы и функции алгебры логики**

**Электронное текстовое издание**

Учебно-методическое пособие для студентов всех форм обучения направлений подготовки 02.03.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии и 09.03.03 – Прикладная информатика

Научный редактор: доц., канд. техн. наук В.Г. Томашевич

Подготовлено кафедрой интеллектуальных информационных технологий

Представлены краткие теоретические сведения и задачи из раздела курса, посвященного алгебре логики. Все задачи снабжены ответами и решениями.

**Екатеринбург  
2015**

# СОДЕРЖАНИЕ

1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.....	3
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	5
2. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ .....	7
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	7
3. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ .....	9
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	10
4. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ .....	12
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	13
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ .....	15
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	25

# 1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

**Теоретическая часть.** *Высказывание* – это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно в данном месте и в данное время. Логические значения высказываний – 1 («истина») или 0 («ложь»).

*Логические операции* над высказываниями: отрицание (унарная операция), конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность (бинарные операции).

*Отрицанием* высказывания  $x$  называется высказывание  $\bar{x}$ , которое истинно, если  $x$  ложно, и ложно, если  $x$  истинно. Читается «не  $x$ » или «неверно, что  $x$ ».

*Конъюнкцией* высказываний  $x$  и  $y$  называется высказывание  $x \& y$ , которое истинно, если  $x$  и  $y$  истинны, и ложно, если хотя бы одно из них ложно. Читается « $x$  и  $y$ ».

*Дизъюнкцией* высказываний  $x$  и  $y$  называется высказывание  $x \vee y$ , которое истинно, если хотя бы одно из высказываний  $x$  или  $y$  истинно, и ложно, если оба они ложны. Читается « $x$  или  $y$ ».

*Импликацией* высказываний  $x$  и  $y$  называется высказывание  $x \rightarrow y$ , которое ложно, если  $x$  истинно, а  $y$  ложно, и истинно во всех остальных случаях. Читается «из  $x$  следует  $y$ » или «если  $x$ , то  $y$ ».

*Эквивалентностью* высказываний  $x$  и  $y$  называется высказывание  $x \leftrightarrow y$ , которое истинно, если оба высказывания  $x$  и  $y$  одновременно истинны или ложны, и ложно во всех остальных случаях. Читается «для того, чтобы  $x$ , необходимо и достаточно, чтобы  $y$ » или « $x$  тогда и только тогда, когда  $y$ ».

Значения логической операции можно описать с помощью таблицы, связывающей значения операндов и операции. Такая таблица называется таблицей истинности.

Таблица истинности для логических операций:

$x$	$y$	$\bar{x}$	$x \& y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Высказывания подразделяются на элементарные и составные.

**Задача 1.** Среди приведенных ниже предложений указать те, которые являются высказываниями, и те, которые не являются:

- 1) Екатеринбург – столица Урала;
- 2) студент Уральского федерального университета;
- 3) Луна – спутник Земли;
- 4)  $x < 0$ ;
- 5) число  $\sqrt{5}$  – иррациональное.

**Решение.** 1) Является высказыванием; 2) не является высказыванием; 3) является высказыванием; 4) не является высказыванием; 5) является высказыванием.

**Задача 2.** Среди следующих высказываний указать элементарные и составные, в составных высказываниях выделить грамматические связки:

- 1) число 9 не делится на 3;
- 2) число 21 делится на 3 и на 7;
- 3) число 3 является делителем числа 27;
- 4) если число 15 делится на 5, то оно делится на 3;
- 5) число 18 делится на 9 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3.

**Решение.** 1) Элементарное высказывание – «число 9 делится на 3», составное – «число 9 не делится на 3», грамматическая связка – «не».

2) Элементарные высказывания – «число 21 делится на 3» и «число 21 делится на 7», составное – «число 21 делится на 3 и на 7», грамматическая связка – «и».

3) Элементарное высказывание.

4) Элементарные высказывания – «число 15 делится на 5» и «число 15 делится на 3», составное – «если число 15 делится на 5, то оно делится на 3», грамматическая связка – «если ..., то ...».

5) Элементарные высказывания – «число 18 делится на 9» и «число 9 делится на 3», составное – «число 18 делится на 9 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3», грамматическая связка – «тогда и только тогда».

### ***Задачи для самостоятельного решения***

**1.1.** Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны: 1) река Исеть впадает в Каспийское море; 2) пейте апельсиновый сок; 3) все люди – братья; 4) математическая логика – увлекательная наука; 5)  $5 < 4$ ; 6)  $x^2 - 5x + 9$ ; 7)  $x^2 - 5x + 9 = 0$ ; 8) для всех натуральных чисел  $x$  и  $y$  верно равенство  $x + y = y + x$ .

**1.2.** Являются ли высказываниями следующие утверждения, установить, истинны они или ложны: 1) сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену; 2) сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену; 3) существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену.

**1.3.** Пусть  $x$  – высказывание «Студент Сидоров изучает информатику»,  $y$  – высказывание «Студент Сидоров успевает по математической логике». Дать словесную формулировку следующих высказываний: 1)  $x \& \bar{y}$ , 2)  $\bar{y} \leftrightarrow \bar{x}$ , 3)  $x \rightarrow y$ .

**1.4.** Обозначить элементарные высказывания буквами и записать следующие высказывания с помощью символов алгебры логики: 1)  $\sqrt{4} = 2$  или  $\sqrt{4} = -2$ ; 2) если число 24 делится на 3 и 4, то оно делится на 12; 3) 18 кратно 3

и 15 не кратно 3; 4) 18 кратно 3 и 15 кратно 3; 5) число 15 – двузначное и кратно 3 или 5, 6)  $e \leq \pi$ .

**1.5.** Пусть  $x$  и  $y$  обозначают элементарные высказывания:  $x$  – «я учусь в Институте фундаментального образования»;  $y$  – «я люблю математическую логику». Прочитать следующие составные высказывания: 1)  $\overline{\overline{x}}$ ; 2)  $x \& y$ ; 3)  $x \& \overline{y}$ ; 4)  $\overline{x} \& \overline{y}$ ; 5)  $\overline{x \& y}$ .

**1.6.** Выяснить истинность или ложность следующих импликаций: 1) если  $2 \cdot 2 = 4$ , то  $4 > 5$ ; 2) если  $2 \cdot 2 = 4$ , то  $4 < 5$ ; 3) если  $2 \cdot 2 = 5$ , то  $4 > 5$ ; 4) если  $2 \cdot 2 = 5$ , то  $4 < 5$ .

**1.7.** Выяснить, при каких значениях  $y$  следующие данные противоречивы: 1)  $x = 0$ ,  $x \& y = 1$ ; 2)  $x = 0$ ,  $x \vee y = 1$ ; 3)  $x = 1$ ,  $x \& y = 0$ ; 4)  $x = 1$ ,  $x \vee y = 0$ .

**1.8.** Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $w$  означают соответственно элементарные высказывания «3 – простое число», «3 – составное число», «4 – простое число», «4 – составное число». Какие из следующих составных высказываний истинны, а какие ложны: 1)  $x \vee z$ ,  $x \vee w$ ,  $y \vee z$ ,  $y \vee w$ ; 2)  $\overline{x} \& \overline{z}$ ,  $\overline{x} \& \overline{w}$ ,  $\overline{y} \& \overline{z}$ ,  $\overline{y} \& \overline{w}$ ?

## 2. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

**Теоретическая часть.** Составное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний путем применения логических операций, называется *формулой алгебры логики*.

Порядок выполнения бинарных логических операций: сначала – конъюнкция, затем – дизъюнкция и в последнюю очередь – импликация и эквивалентность. Логические значения формулы алгебры логики могут быть описаны с помощью таблицы истинности.

Формула, истинная при всех значениях входящих в нее переменных, называется *тождественно истинной* или *тавтологией*.

Формула, ложная при всех значениях входящих в нее переменных, называется *тождественно ложной* или *противоречием*.

Формула, истинная хотя бы на одном наборе значений входящих в нее переменных и не являющаяся тождественно истинной, называется *выполнимой* или *опровержимой*.

**Задача 3.** Составить таблицу истинности для формулы  $\bar{x} \vee \bar{y}$ .

**Решение.** Таблица истинности будет иметь следующий вид:

$x$	$y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

### Задачи для самостоятельного решения

2.1. Проверить, не используя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными: 1)  $x \vee \bar{x}$ ; 2)  $\overline{x \& x}$ ; 3)  $x \leftrightarrow \bar{x}$ ; 4)  $x \leftrightarrow x \& (\bar{x} \rightarrow x \& x)$ ; 5)  $x \& (x \leftrightarrow \bar{x})$ .

**2.2.** Найти логические значения  $x$  и  $y$ , при которых выполняются следующие равенства: 1)  $x \vee y = \bar{y}$ ; 2)  $1 \rightarrow \bar{x} \rightarrow y = 0$ .

**2.3.** 1) Пусть  $x$  истинно, чему равны значения импликаций  $\bar{x} \rightarrow y \& z$  и  $\bar{x} \& y \rightarrow \bar{y} \vee z$ ? 2) Пусть эквивалентность  $x \leftrightarrow y$  и импликация  $y \rightarrow x$  ложны, чему равно значение импликации  $x \rightarrow y$ ? 3) Пусть импликация  $x \rightarrow y$  истинна, чему равны значения импликаций  $\overline{z \rightarrow (x \rightarrow y)}$  и  $\overline{x \rightarrow y \rightarrow z}$ ?

**2.4.** Пусть  $x = 1, y = 1, z = 0$ . Определить логические значения следующих формул: 1)  $x \& y \& z$ , 2)  $x \vee y \vee z$ , 3)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ , 4)  $x \rightarrow y \rightarrow z$ , 5)  $x \vee y \rightarrow z$ .

**2.5.** Составить таблицы истинности для следующих формул: 1)  $x \& \bar{y}$ , 2)  $x \& y \vee z$ , 3)  $x \& \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \vee y \rightarrow \bar{z})$ , 4)  $x \rightarrow \bar{y} \rightarrow \overline{x \vee y \& \bar{z}}$ .

**2.6.** Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, а какие – тождественно ложными:

1)  $\bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$ ,

2)  $\overline{x \rightarrow (y \rightarrow x)}$ ,

3)  $y \rightarrow x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{y})$ ,

4)  $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$ ,

5)  $\overline{x \rightarrow z \rightarrow (y \rightarrow z \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))}$ , 6)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \rightarrow (x \rightarrow z))$ .



### 3. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

**Теоретическая часть.** Две формулы алгебры логики называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них элементарных высказываний.

Равносильность формул  $L_1$  и  $L_2$  обозначается как  $L_1 \equiv L_2$ .

Основные равносильности:

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $x \& 0 \equiv 0$ ,          | 7. $x \vee 0 \equiv x$ ,        |
| 2. $x \& 1 \equiv x$ ,          | 8. $x \vee 1 \equiv 1$ ,        |
| 3. $x \& x \equiv x$ ,          | 9. $x \vee x \equiv x$ ,        |
| 4. $x \& \bar{x} \equiv 0$ ,    | 10. $x \vee \bar{x} \equiv 1$ , |
| 5. $x \& (y \vee x) \equiv x$ , | 11. $\bar{\bar{x}} \equiv x$ .  |
| 6. $x \vee y \& x \equiv x$ ,   |                                 |

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ , | 4. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$ ,                     |
| 2. $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ , | 5. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$ ,                     |
| 3. $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$ ,         | 6. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$ . |

Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $x \& y \equiv y \& x$ ,                      | 4. $x \vee y \equiv y \vee x$ ,                      |
| 2. $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ ,        | 5. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ ,    |
| 3. $x \& (y \vee z) \equiv x \& y \vee x \& z$ , | 6. $x \vee y \& z \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ . |

**Задача 4.** Упростить формулу  $x \rightarrow x \rightarrow x$ .

**Решение.**  $x \rightarrow x \rightarrow x \equiv \bar{x} \vee x \rightarrow x \equiv 1 \rightarrow x \equiv 0 \vee x \equiv x$ .

**Задача 5.** Доказать равносильность формул  $x \& \bar{y} \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow y$ .

**Решение.**  $x \& \bar{y} \rightarrow 0 \equiv \overline{x \& \bar{y} \vee 0} \equiv \overline{x \& \bar{y}} \equiv \bar{x} \vee y \equiv x \rightarrow y$ .

**Задача 6.** Доказать тождественную ложность формулы  $\overline{\overline{x \rightarrow (x \rightarrow y)}}$ .

**Решение.**  $\overline{\overline{x \rightarrow (x \rightarrow y)}} \equiv \overline{\overline{x \rightarrow \overline{x \vee y}}} \equiv \overline{\overline{\overline{x \vee \overline{x \vee y}}}} \equiv \overline{\overline{x \vee \overline{x \vee y}}} \equiv \overline{1 \vee y} \equiv 0$ .

### **Задачи для самостоятельного решения**

**3.1.** Найти  $z$ , если  $\overline{\overline{x \vee z \vee x \vee z}} \equiv y$ .

**3.2.** Выразить все основные логические операции: 1) через конъюнкцию и отрицание; 2) через дизъюнкцию и отрицание; 3) через импликацию и отрицание.

**3.3.** Выразить дизъюнкцию через импликацию.

**3.4.** Упростить следующие формулы:

- 1)  $x \vee \overline{x} \& y$ ;
- 2)  $x \rightarrow (x \rightarrow y)$ ;
- 3)  $(x \vee y) \& (x \vee \overline{y})$ ;
- 4)  $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y)$ ;
- 5)  $\overline{(x \vee y \rightarrow x \vee y)} \& y$ ;
- 6)  $\overline{\overline{\overline{x} \& \overline{y} \vee (x \rightarrow y) \& x}}$ ;
- 7)  $(x \vee \overline{y} \rightarrow (z \rightarrow \overline{y \vee y \vee x})) \& x \rightarrow y$ .

**3.5.** Доказать равносильность следующих формул:

- 1)  $\overline{x \rightarrow y}$  и  $x \& \overline{y}$ ;
- 2)  $x \rightarrow \overline{y}$  и  $y \rightarrow \overline{x}$ ,
- 3)  $x \leftrightarrow y$  и  $\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$ ;
- 4)  $x \vee \overline{x} \& y$  и  $x \vee y$ ;
- 5)  $(x \vee y) \& (x \vee \overline{y})$  и  $x$ ;
- 6)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$  и  $x \& y \rightarrow z$ ;
- 7)  $x \& y \vee \overline{x} \& y \vee \overline{x} \& \overline{y}$  и  $x \rightarrow y$ ;
- 8)  $x \& y \vee (x \vee y) \& (\overline{x \vee \overline{y}})$  и  $x \vee y$ ;

$$9) x \& (z \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z) \& y \text{ и } (x \vee y) \& (y \vee \bar{z});$$

$$10) x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \text{ и } x.$$

**3.6.** Доказать тождественную истинность следующих формул:

$$1) x \& y \rightarrow x;$$

$$2) x \rightarrow (y \rightarrow x);$$

$$3) \bar{y} \rightarrow \bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y);$$

$$4) (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x};$$

$$5) x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \& y \rightarrow z);$$

$$6) x \& y \rightarrow z \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z));$$

$$7) (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z);$$

$$8) x \rightarrow z \rightarrow (y \rightarrow z \rightarrow (x \vee y \rightarrow z));$$

$$9) x \rightarrow y \rightarrow (y \rightarrow z \rightarrow (x \vee y \rightarrow z));$$

$$10) x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \rightarrow (x \rightarrow z)).$$

**3.7.** Доказать тождественную ложность следующих формул:

$$1) x \vee \bar{x} \rightarrow y \& \bar{y};$$

$$2) x \& (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow \bar{y});$$

$$3) \overline{x \& \bar{x} \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow w \& \bar{w}};$$

$$4) \overline{x \rightarrow y \rightarrow (x \& z \rightarrow y \& z)};$$

$$5) x \& y \& z \& (x \vee y \vee z \rightarrow \bar{w}) \& w.$$

## 4. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

**Теоретическая часть.** Функцией алгебры логики  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется функция, принимающая значения 1 или 0, аргументы которой также принимают значения 1 или 0.

Любая формула алгебры логики есть функция алгебры логики, причем тождественно истинные и тождественно ложные формулы представляют собой постоянные функции.

Любую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы алгебры логики:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv & f(1, 1, \dots, 1) \& x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n \vee \\ & \vee f(1, 1, \dots, 0) \& x_1 \& x_2 \& \dots \& x_{n-1} \& \overline{x_n} \vee \dots \vee \\ & \vee f(0, 0, \dots, 0) \& \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \dots \& \overline{x_{n-1}} \& \overline{x_n}. \end{aligned}$$

Соответствующую функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  формулу алгебры логики можно получить с помощью таблицы истинности этой функции. Для этого для всех наборов значений переменных, на которых функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принимает значение 1, записывается конъюнкция переменных высказываний, причем за член конъюнкции берется  $x_i$ , если на указанном наборе значений переменных  $x_i$  равно 1, и  $\overline{x_i}$ , если на указанном наборе значений переменных  $x_i$  равно 0. Дизъюнкция всех полученных таким образом конъюнкций и будет искомой формулой алгебры логики.

**Задача 7.** Найти формулу, которая определяет функцию  $f(x, y)$  по следующей таблице истинности:

$x$	$y$	$f(x, y)$
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

**Решение.** Воспользуемся правилом получения формулы алгебры логики из таблицы истинности для функции  $f(x, y)$ . Получим:

$$f(x, y) \equiv x \& y \vee \bar{x} \& y.$$

Упростим полученную формулу:

$$x \& y \vee \bar{x} \& y \equiv (x \vee \bar{x}) \& y \equiv 1 \& y \equiv y.$$

**Задача 8.** Найти формулу, которая определяет функцию  $f(x, y, z)$  по следующей таблице истинности:

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

**Решение.** Воспользуемся правилом получения формулы алгебры логики из таблицы истинности для функции  $f(x, y, z)$ . В результате получим:

$$f(x, y, z) \equiv x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}.$$

Упростим полученную формулу:

$$\begin{aligned} & x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z} \equiv \\ & \equiv x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& \bar{z}) \equiv \\ & \equiv x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& \bar{z} \& (y \vee \bar{y}) \equiv \\ & \equiv x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& \bar{z} \& 1 \equiv x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& \bar{z}. \end{aligned}$$

### **Задачи для самостоятельного решения**

**4.1.** Выписать все функции алгебры логики одной переменной.

**4.2.** Выписать все функции алгебры логики двух переменных.

**4.3.** По таблицам истинности найти формулы, определяющие функции  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ ,  $f_5$  ( $f_i \equiv f_i(x, y, z)$ ), и придать им более простой вид:

$x$	$y$	$z$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

**4.4.** Пусть функция алгебры логики:

1)  $f_1(x, y, z)$  принимает значение 1 тогда и только тогда, когда только одна из её переменных принимает значение 1;

2)  $f_2(x, y, z)$  принимает значение 1 тогда и только тогда, когда одновременно две её переменных принимают значение 1;

3)  $f_3(x, y, z)$  принимает значение, совпадающее со значением, которое принимает большинство её переменных.

Составить таблицы истинности для этих функций, найти формулы алгебры логики, определяющие их, и придать этим формулам более простой вид.

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

**1.1.** 1) Ложное высказывание; 2) не является высказыванием; 3) ложное высказывание; 4) не является высказыванием; 5) ложное высказывание; 6) не является высказыванием; 7) не является высказыванием; 8) истинное высказывание.

**1.2.** 1) Утверждение является высказыванием, оно ложно, что доказывает контрпример  $x^2 - 4 = 0$ ; 2) утверждение не является высказыванием; 3) утверждение является высказыванием, оно истинно при условии, что в приведённом квадратном уравнении свободный член равен коэффициенту при  $x$  в первой степени, взятому с обратным знаком. Например, сумма корней уравнения  $x^2 - 2x + 2 = 0$  равна свободному члену.

**1.3.** 1) «Студент Сидоров изучает информатику и не успевает по математической логике»; 2) «студент Сидоров не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает информатику»; 3) «если студент Сидоров изучает информатику, то он успевает по математической логике».

**1.4.** Обозначим буквами следующие высказывания:  $a$  – « $\sqrt{4} = 2$ »;  $b$  – « $\sqrt{4} = -2$ »;  $c$  – «число 24 делится на 3»;  $d$  – «число 24 делится на 4»;  $e$  – «число 24 делится на 12»;  $f$  – «число 18 кратно 3»;  $g$  – «число 15 кратно 3»;  $h$  – «число 15 – двузначное»;  $k$  – «число 15 кратно 5»;  $l$  – « $e \leq \pi$ ».

Тогда требуемые высказывания запишутся так: 1)  $a \vee b$ ; 2)  $c \& d \rightarrow e$ ; 3)  $f \& \bar{g}$ ; 4)  $f \& g$ ; 5)  $h \& (g \vee k)$ ; 6)  $l$ .

**1.5.** 1) Неверно, я не учусь в Институте фундаментального образования; 2) я учусь в Институте фундаментального образования и люблю математическую логику; 3) я учусь в Институте фундаментального образования и не люблю математическую логику; 4) я не учусь в Институте фундаментального образования и не люблю математическую логику; 5) неверно, что я учусь в Институте фундаментального образования и люблю математическую логику.

**1.6.** 1) Высказывание ложно; 2) высказывание истинно; 3) высказывание истинно; 4) высказывание истинно.

**1.7.** 1) Противоречивы при любом  $y$ ; 2) противоречивы при  $y = 0$ ; 3) противоречивы при  $y = 1$ ; 4) противоречивы при любом  $y$ .

**1.8.** 1) Высказывания  $x \vee z$ ,  $x \vee w$ ,  $y \vee w$  – истинны, а  $y \vee z$  – ложно; 2) высказывание  $\bar{y} \& \bar{z}$  – истинно, а  $\bar{x} \& \bar{z}$ ,  $\bar{x} \& \bar{w}$ ,  $\bar{y} \& \bar{w}$  – ложны.

**2.1.** 1) Тождественно истинная формула; 2) тождественно истинная формула; 3) не тождественно истинная формула; 4) тождественно истинная формула; 5) не тождественно истинная формула.

**2.2.** 1)  $x = 1$ ,  $y = 0$ ;

2)  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

**2.3.** 1) Импликации  $\bar{x} \rightarrow y \& z$  и  $\bar{x} \& y \rightarrow \bar{y} \vee z$  истинны.

2) Импликация  $x \rightarrow y$  истинна.

3) Импликация  $\overline{z \rightarrow (x \rightarrow y)}$  ложна, а  $\overline{x \rightarrow y \rightarrow z}$  истинна.

**2.4.** 1) Значение формулы ложно; 2) значение формулы истинно; 3) значение формулы ложно; 4) значение формулы ложно; 5) значение формулы ложно.

**2.5.** Таблицы истинности будут иметь следующий вид:

1)

$x$	$y$	$\bar{y}$	$x \& \bar{y}$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

2)



$x$	$y$	$z$	$x \& y$	$x \& y \vee z$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

3)

$x$	$y$	$z$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} \vee y$	$\bar{x} \vee y \rightarrow \bar{z}$	$x \& \bar{y}$	$x \& \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \vee y \rightarrow \bar{z})$
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1

4)

$x$	$y$	$z$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y} \& \bar{z}$	$x \rightarrow \bar{y}$	$x \rightarrow \bar{y} \rightarrow \overline{x \vee y} \& \bar{z}$
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1

- 2.6. 1) Формула тождественно истинна; 2) формула тождественно ложна;  
 3) формула тождественно истинна; 4) формула тождественно истинна;  
 5) формула тождественно ложна; 6) формула тождественно истинна.

3.1. Выполним равносильные преобразования:

$$\overline{\overline{x \vee z \vee x \vee z}} \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{z} \vee \overline{x} \& \overline{z}} \equiv x \& \overline{z} \vee x \& \overline{z} \equiv \overline{z} \& (x \vee x) \equiv \overline{z} \& 1 \equiv \overline{z}.$$

Следовательно,  $\overline{z} \equiv y$  и  $z \equiv \overline{y}$ .

3.2. 1)  $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{y}},$

$$x \rightarrow y \equiv \overline{x} \vee y \equiv \overline{\overline{\overline{x} \& \overline{y}}} \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{y}},$$

$$x \leftrightarrow y \equiv \overline{\overline{x \& y \& y \& x}},$$

2)  $x \& y \equiv \overline{\overline{x \vee y}},$

$$x \rightarrow y \equiv \overline{x} \vee y,$$

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) \equiv (\overline{x} \vee y) \& (\overline{y} \vee x) \equiv \overline{\overline{\overline{\overline{x \vee y \vee y \vee x}}}}$$

3)  $x \vee y \equiv \overline{x} \rightarrow y,$

$$x \& y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{x \rightarrow y},$$

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow y &\equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) \equiv (\overline{x} \vee y) \& (\overline{y} \vee x) \equiv \overline{\overline{\overline{\overline{x \vee y \vee y \vee x}}}} \\ &\equiv \overline{\overline{\overline{\overline{x \rightarrow y \vee y \rightarrow x}}}} \equiv \overline{\overline{\overline{x \rightarrow y \rightarrow y \rightarrow x}}}. \end{aligned}$$

3.3.  $x \vee y \equiv (x \vee y) \& (\overline{y} \vee y) \equiv x \& \overline{y} \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y \vee y}} \equiv \overline{\overline{x \vee y \vee y}} \equiv$   
 $\equiv \overline{\overline{x \vee y \rightarrow y}} \equiv x \rightarrow y \rightarrow y.$

3.4. Подвергнем указанные формулы равносильным преобразованиям. В результате получим:

1)  $x \vee \overline{x} \& y \equiv (x \vee \overline{x}) \& (x \vee y) \equiv 1 \& (x \vee y) \equiv x \vee y;$

2)  $x \rightarrow (x \rightarrow y) \equiv x \rightarrow \overline{x} \vee y \equiv \overline{x} \vee \overline{x} \vee y \equiv \overline{x} \vee y;$

3)  $(x \vee y) \& (x \vee \overline{y}) \equiv x \vee y \& \overline{y} \equiv x \vee 0 \equiv x;$

4)  $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y) \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) \& (x \vee y) \equiv$

$$\begin{aligned}
&\equiv (\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee x) \& (x \vee y) \equiv (\bar{x} \vee y) \& (x \vee \bar{y}) \& (x \vee y) \equiv \\
&\equiv (\bar{x} \vee y) \& (x \vee \bar{y} \& y) \equiv (\bar{x} \vee y) \& (x \vee 0) \equiv x \& (\bar{x} \vee y) \equiv \\
&\equiv x \& \bar{x} \vee x \& y \equiv 0 \vee x \& y \equiv x \& y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \overline{(x \vee y \rightarrow x \vee y)} \& y &\equiv \overline{(x \vee y \vee x \vee y)} \& y \equiv (x \vee y \vee x \vee y) \& y \equiv \\
&\equiv (x \vee y) \& y \equiv y \& (x \vee y) \equiv y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \overline{\bar{x} \& \bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \& x &\equiv x \vee y \vee (\bar{x} \vee y) \& x \equiv x \vee y \vee \bar{x} \& x \vee y \& x \equiv \\
&\equiv x \vee y \vee 0 \vee y \& x \equiv x \vee y \& x \vee y \equiv x \vee y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) (x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow \bar{y} \vee y \vee x)) \& x \rightarrow y &\equiv (x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow 1 \vee x)) \& x \rightarrow y \equiv \\
&x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow 1) \& x \rightarrow y \equiv (x \vee \bar{y} \rightarrow 1) \& x \rightarrow y \equiv 1 \& x \rightarrow y \equiv x \rightarrow y \equiv \\
&\bar{x} \vee y.
\end{aligned}$$

**3.5.** Для доказательства равносильности каждой пары формул подвергнем первую из них равносильным преобразованиям:

$$\begin{aligned}
1) \overline{x \rightarrow y} &\equiv \overline{\bar{x} \vee y} \equiv \bar{\bar{x}} \& \bar{y} \equiv x \& \bar{y}; \\
2) x \rightarrow \bar{y} &\equiv \bar{x} \vee \bar{y} \equiv \bar{y} \vee \bar{x} \equiv y \rightarrow \bar{x}; \\
3) x \leftrightarrow y &\equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) \equiv (\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee x) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y}) \& (\bar{y} \vee \bar{x}) \equiv \\
&\equiv (\bar{y} \vee \bar{x}) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \& (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \& (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \equiv \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}; \\
4) x \vee \bar{x} \& y &\equiv (x \vee \bar{x}) \& (x \vee y) \equiv 1 \& (x \vee y) \equiv x \vee y; \\
5) (x \vee y) \& (x \vee \bar{y}) &\equiv (x \vee y) \& x \vee (x \vee y) \& \bar{y} \equiv \\
&\equiv x \& (y \vee x) \vee \bar{y} \& x \vee \bar{y} \& y \equiv x \vee \bar{y} \& x \vee 0 \equiv x \vee \bar{y} \& x \equiv x; \\
6) x \rightarrow (y \rightarrow z) &\equiv x \rightarrow \bar{y} \vee z \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}} \vee z \equiv x \& y \rightarrow z; \\
7) x \& y \vee \bar{x} \& y \vee \bar{x} \& \bar{y} &\equiv x \& y \vee \bar{x} \& (y \vee \bar{y}) \equiv x \& y \vee \bar{x} \& 1 \equiv \\
&\equiv \bar{x} \vee x \& y \equiv (\bar{x} \vee x) \& (x \vee y) \equiv 1 \& (x \vee y) \equiv \bar{x} \vee y \equiv x \rightarrow y; \\
8) x \& y \vee (x \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) &\equiv x \& y \vee (x \vee y) \& \bar{x} \vee (x \vee y) \& \bar{y} \equiv \\
&\equiv x \& y \vee \bar{x} \& x \vee \bar{x} \& y \vee x \& \bar{y} \vee y \& \bar{y} \equiv x \& y \vee 0 \vee \bar{x} \& y \vee x \& \bar{y} \vee 0 \equiv \\
&\equiv x \& (y \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \& y \equiv x \& 1 \vee \bar{x} \& y \equiv x \vee \bar{x} \& y \equiv (x \vee \bar{x}) \& (x \vee y) \equiv
\end{aligned}$$

$$\equiv 1 \& (x \vee y) \equiv x \vee y;$$

$$\begin{aligned} 9) \quad & x \& (z \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z) \& y \equiv x \& (\bar{z} \vee y) \vee y \& (\bar{x} \vee z) \equiv \\ & \equiv x \& \bar{z} \vee x \& y \vee y \& \bar{x} \vee y \& z \equiv x \& \bar{z} \vee y \& (x \vee \bar{x}) \vee y \& z \equiv \\ & \equiv x \& \bar{z} \vee y \& 1 \vee y \& z \equiv x \& \bar{z} \vee y \vee y \& z \equiv x \& \bar{z} \vee y \equiv (x \vee y) \& (y \vee \bar{z}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad & x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \equiv \\ & \equiv x \& (y \& z \vee y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z \vee \bar{y} \& \bar{z}) \equiv x \& (y \& (z \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \& (z \vee \bar{z})) \equiv \\ & \equiv x \& (y \& 1 \vee \bar{y} \& 1) \equiv x \& (y \vee \bar{y}) \equiv x \& 1 \equiv x. \end{aligned}$$

**3.6.** Для доказательства тождественной истинности указанных формул подвергнем их равносильным преобразованиям. В результате получим:

$$1) \quad x \& y \rightarrow x \equiv \overline{x \& y} \vee x \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee x \equiv 1 \vee \bar{y} \equiv 1;$$

$$2) \quad x \rightarrow (y \rightarrow x) \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee x \equiv \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \bar{y} \equiv 1;$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \bar{y} \rightarrow \bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y) \equiv \overline{\bar{y} \rightarrow \bar{x}} \vee \bar{x} \rightarrow \bar{x} \vee y \equiv \overline{\bar{y} \vee \bar{x}} \vee \bar{x} \vee y \equiv \bar{y} \& \bar{x} \vee \bar{x} \vee y \equiv \\ & \equiv (\bar{y} \vee \bar{x}) \& (x \vee \bar{x}) \vee y \equiv (\bar{y} \vee \bar{x}) \& 1 \vee y \equiv \bar{y} \vee \bar{x} \vee y \equiv 1 \vee \bar{x} \equiv 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x} \equiv (\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow \bar{x} \equiv \overline{(\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y})} \vee \bar{x} \equiv \\ & \equiv \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x}} \equiv \bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{x} \equiv x \& \bar{y} \vee x \& y \vee \bar{x} \equiv \\ & \equiv x \& \bar{y} \vee (x \vee \bar{x}) \& (y \vee \bar{y}) \equiv x \& \bar{y} \vee 1 \& (y \vee \bar{y}) \equiv x \& \bar{y} \vee y \vee \bar{x} \equiv \\ & \equiv (x \vee y) \& (\bar{y} \vee y) \vee \bar{x} \equiv (x \vee y) \& 1 \vee \bar{x} \equiv x \vee y \vee \bar{x} \equiv 1 \vee y \equiv 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \& y \rightarrow z) \equiv x \rightarrow \bar{y} \vee z \rightarrow \overline{x \& y \rightarrow z} \equiv \\ & \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z} \equiv 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & x \& y \rightarrow z \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \equiv \overline{x \& y \rightarrow z} \rightarrow (x \rightarrow \bar{y} \vee z) \equiv \\ & \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z} \equiv 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \equiv (\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee z) \rightarrow \bar{x} \vee z \equiv \\ & \equiv \overline{(\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee z)} \vee \bar{x} \vee z \equiv \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee z} \vee \bar{x} \vee z \equiv \bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{y} \& \bar{z} \vee \bar{x} \vee z \equiv \\ & \equiv x \& \bar{y} \vee y \& \bar{z} \vee \bar{x} \vee z \equiv (x \vee \bar{x}) \& (\bar{y} \vee \bar{y}) \vee (y \vee z) \& (\bar{z} \vee z) \equiv \\ & \equiv 1 \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (y \vee z) \& 1 \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee y \vee z \equiv \bar{x} \vee 1 \vee z \equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad & x \rightarrow z \rightarrow (y \rightarrow z \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)) \equiv \bar{x} \vee z \rightarrow (\bar{y} \vee z \rightarrow \overline{x \vee y \vee z}) \equiv \\
& \equiv \bar{x} \vee z \rightarrow \overline{\bar{y} \vee z \vee x \vee y \vee z} \equiv \overline{\bar{x} \vee z \vee \bar{y} \vee z \vee x \vee y \vee z} \equiv \\
& \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{z} \vee \bar{y} \& \bar{z} \vee x \vee y \vee z} \equiv \bar{z} \& (x \vee y) \vee \overline{\bar{z} \& x \vee y} \equiv \\
& \equiv \bar{z} \& (x \vee y) \vee \overline{\bar{z} \& (x \vee y)} \equiv 1; \\
9) \quad & x \rightarrow y \rightarrow (y \rightarrow z \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)) \equiv \\
& \equiv \bar{x} \vee y \rightarrow (\bar{y} \vee z \rightarrow \overline{x \vee y \vee z}) \equiv \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee z \vee x \vee y \vee z} \equiv \\
& \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{y} \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \vee z} \equiv x \& \bar{y} \vee x \& \bar{y} \vee y \& \bar{z} \vee z \equiv \\
& \equiv (x \vee \bar{x}) \& \bar{y} \vee (y \vee z) \& (z \vee \bar{z}) \equiv \bar{y} \vee y \vee z \equiv 1 \vee z \equiv 1; \\
10) \quad & x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \rightarrow (x \rightarrow z)) \equiv x \rightarrow \bar{y} \vee z \rightarrow (\bar{x} \vee y \rightarrow \bar{x} \vee z) \equiv \\
& \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{x} \vee z} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow \overline{\bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{x} \vee z} \equiv \\
& \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow (\bar{x} \vee x) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow 1 \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z \equiv \\
& \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \rightarrow \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z} \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z} \equiv 1.
\end{aligned}$$

**3.7.** Для доказательства тождественной ложности формул выполним равносильные преобразования:

$$\begin{aligned}
1) \quad & x \vee \bar{x} \rightarrow y \& \bar{y} \equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0; \\
2) \quad & x \& (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow \bar{y}) \equiv x \& (\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv \\
& \equiv (x \& \bar{x} \vee x \& y) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (0 \vee x \& y) \& \overline{x \& y} \equiv x \& y \& \overline{x \& y} \equiv 0; \\
3) \quad & \overline{x \& \bar{x} \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow w \& \bar{w}} \equiv \overline{0 \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow 0} \equiv \overline{1 \vee y \rightarrow z \rightarrow 0} \equiv \\
& \equiv \overline{0 \rightarrow z \rightarrow 0} \equiv \overline{1 \vee z \rightarrow 0} \equiv \overline{1 \rightarrow 0} \equiv 0; \\
4) \quad & \overline{x \rightarrow y \rightarrow (x \& z \rightarrow y \& z)} \equiv \overline{\bar{x} \vee y \rightarrow x \& z \vee y \& z} \equiv \\
& \equiv \overline{\overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{x} \vee z \vee y \& z}} \equiv \overline{x \& \bar{y} \vee x \vee \bar{z} \vee y \& z} \equiv \\
& \equiv \overline{(x \vee \bar{x}) \& (\bar{y} \vee x) \vee (\bar{z} \vee y) \& (\bar{z} \vee z)} \equiv \overline{1 \& (\bar{x} \vee y) \vee (y \vee \bar{z}) \& 1} \equiv \\
& \equiv \overline{x \vee y \vee y \vee z} \equiv \overline{x \vee 1 \vee z} \equiv 0, \\
5) \quad & x \& y \& z \& (x \vee y \vee z \rightarrow \bar{w}) \& w \equiv x \& y \& z \& \overline{(x \vee y \vee z \vee w)} \& w \equiv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv x \& y \& z \& (w \& \overline{x \vee y \vee z \vee w \& w}) \equiv x \& y \& z \& w \& \overline{x \vee y \vee z} \equiv \\ &\equiv x \& y \& z \& w \& \overline{x \vee y} \& \overline{z} \equiv x \& y \& 0 \& w \& \overline{x \vee y} \equiv 0. \end{aligned}$$

**4.1.** Таблица истинности для всевозможных функций одной переменной ( $f_i \equiv f_i(x)$ ) имеет вид:

$x$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Аналитические выражения для этих функций могут быть записаны следующим образом:  $f_1 \equiv 1$ ,  $f_2 \equiv x$ ,  $f_3 \equiv \bar{x}$ ,  $f_4 \equiv 0$ .

**4.2.** Таблица истинности для всевозможных функций двух переменных ( $f_i \equiv f_i(x, y)$ ) имеет вид:

$x$	$y$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Аналитические выражения для этих функций могут быть записаны следующим образом:  $f_1 \equiv 1$ ,  $f_2 \equiv x \vee y$ ,  $f_3 \equiv y \rightarrow x$ ,  $f_4 \equiv x$ ,  $f_5 \equiv x \rightarrow y$ ,  $f_6 \equiv y$ ,  $f_7 \equiv x \leftrightarrow y$ ,  $f_8 \equiv x \& y$ ,  $f_9 \equiv \overline{x \& y}$ ,  $f_{10} \equiv \overline{x \leftrightarrow y}$ ,  $f_{11} \equiv \bar{y}$ ,  $f_{12} \equiv \overline{x \rightarrow y}$ ,  $f_{13} \equiv \bar{x}$ ,  $f_{14} \equiv \overline{y \rightarrow x}$ ,  $f_{15} \equiv \overline{x \vee y}$ ,  $f_{16} \equiv 0$ .

**4.3.** Воспользуемся правилом получения формулы алгебры логики из таблицы истинности для функции  $f_i(x, y, z)$ . Полученные таким образом формулы упростим:

$$\begin{aligned} 1) \quad f_1 &\equiv x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \equiv \\ &\equiv x \& y \& (z \vee \bar{z}) \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \equiv x \& y \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \equiv y \& (x \vee \bar{x} \& \bar{z}) \equiv \\ &\equiv y \& (x \vee \bar{x}) \& (x \vee \bar{z}) \equiv y \& (x \vee \bar{z}); \end{aligned}$$

$$2) f_2 \equiv x \& y \& z \vee x \& \bar{y} \& z \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \equiv$$

$$\equiv x \& z \& (y \vee \bar{y}) \vee \bar{y} \& (x \& \bar{z} \vee x \& z) \equiv x \& z \vee \bar{y} \& (x \& \bar{z} \vee x \& z);$$

$$3) f_3 \equiv x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \equiv$$

$$\equiv x \& y \& (z \vee \bar{z}) \vee x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \equiv x \& y \vee x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z);$$

$$4) f_4 \equiv x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \equiv$$

$$\equiv x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& \bar{z}) \vee \bar{y} \& (x \& z \vee x \& z) \equiv$$

$$x \& \bar{z} \& (y \vee \bar{y}) \vee \bar{y} \& z \& (x \vee x) \equiv x \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z;$$

$$5) f_5 \equiv x \& y \& z \vee x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \equiv$$

$$\equiv y \& z \& (x \vee x) \vee x \& \bar{z} \& (y \vee \bar{y}) \vee x \& \bar{y} \& z \equiv$$

$$\equiv y \& z \vee x \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \equiv y \& z \vee x \& (\bar{z} \vee \bar{y} \& z) \equiv$$

$$\equiv y \& z \vee x \& (\bar{z} \vee \bar{y}) \& (\bar{z} \vee z) \equiv y \& z \vee x \& (\bar{y} \vee \bar{z}) \equiv$$

$$\equiv (y \& z \vee x) \& (y \& z \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z) \& (y \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (z \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z) \& 1 \& 1 \equiv \bar{x} \vee y \& z.$$

**4.4.** Составим таблицы истинности для функций  $f_1(x, y, z)$ ,  $f_2(x, y, z)$  и  $f_3(x, y, z)$ , из них найдём соответствующие этим функциям формулы алгебры логики. Полученные формулы упростим.

$x$	$y$	$z$	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned}
1) \quad f_1(x, y, z) &\equiv x \& \bar{y} \& \bar{z} \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \equiv \\
&\equiv \bar{z} \& (x \& \bar{y} \vee x \& y) \vee \bar{x} \& \bar{y} \& z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad f_2(x, y, z) &\equiv x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& z \equiv \\
&\equiv x \& (y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& y \& z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad f_3(x, y, z) &\equiv x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& z \equiv \\
&\equiv x \& (y \& z \vee y \& \bar{z} \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& y \& z \equiv \\
&\equiv x \& (y \& (z \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& y \& z \equiv x \& (y \vee \bar{y} \& z) \vee \bar{x} \& y \& z \equiv \\
&\equiv x \& (y \vee \bar{y}) \& (y \vee z) \vee \bar{x} \& y \& z \equiv x \& (y \vee z) \vee \bar{x} \& y \& z \equiv \\
&\equiv x \& y \vee x \& z \vee \bar{x} \& y \& z \equiv x \& y \vee z \& (x \vee \bar{x} \& y) \equiv \\
&\equiv x \& y \vee z \& (x \vee \bar{x}) \& (x \vee y) \equiv x \& y \vee z \& (x \vee y) \equiv \\
&\equiv x \& y \vee x \& z \vee y \& z \equiv x \& (y \vee z) \vee y \& z.
\end{aligned}$$



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гиндикин, С.Г.* Алгебра логики в задачах / С.Г. Гиндикин. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 288 с.
2. *Замятин, А.П.* Математическая логика : учеб. пособие / А.П. Замятин. – Екатеринбург : Изд-во Урал ун-та, 2004. – 140 с.
3. *Лавров, И.А.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов : учеб. изд. / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 256 с.
4. *Лихтарников, Л.М.* Математическая логика : учеб. пособие для вузов / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачёва. – 4-е изд. – СПб. : Лань, 2009. – 288 с.

**Учебное электронное текстовое издание**

**Опарин Дмитрий Всеволодович**

## **ПРАКТИКУМ ПО ОСНОВАМ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ**

**Часть I. Логические операции над высказываниями,  
формулы и функции алгебры логики**

**Редактор**

*Н.В. Лутова .*

**Компьютерная верстка**

*авторская*

**Рекомендовано Методическим советом ФГАОУ ВПО УрФУ**

**Разрешено к публикации 22.05.2015**

**Электронный формат – pdf**

**Объем 1,26 уч.-изд. л.**



**620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19**

**ЦНОТ ИТОО УрФУ**